

# Optika és Relativitáselmélet

II. BsC fizikus hallgatóknak

3.

Fényelhajlás (Diffrakció)



Akadályok között elhaladó hullámok továbbterjedése  
**nem azonos** a geometriai árnyékkal.

Pontos elmélet: Maxwell-egyenletek +  
az akadályok felületén a határfeltételek  
(matematikailag nehéz feladat)

Használható elmélet:

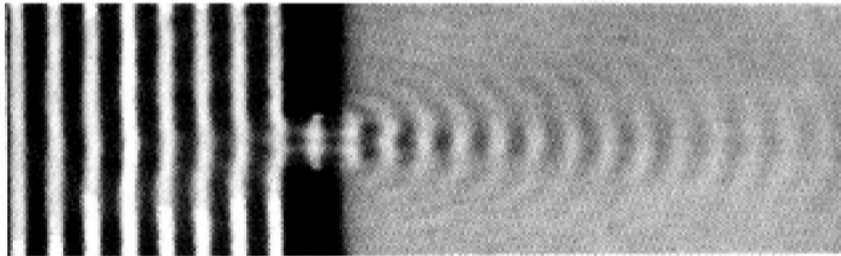
Hullám amplitúdója **zérus**, ahol akadály van, ahol nincs akadály,  
onnan a hullám **változatlanul továbbterjed**.

Hogy megy tovább? **Huygens-Fresnel-elv**

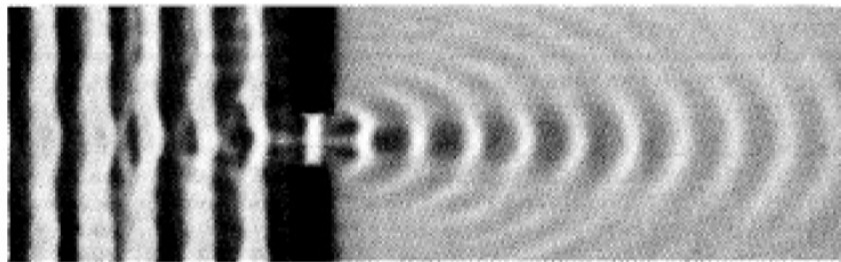
**Huygens** (1690): az átengedett hullámfront minden pontja egy gömbhullám forrása;  
a gömbhullámok *burkolója* a továbbterjedő hullámfelület.

**Fresnel** (1818): módosított elv; **NEM** a burkolója, hanem az **EREDŐJE**,  
azaz az interferáló gömbhullámok összege megy tovább.

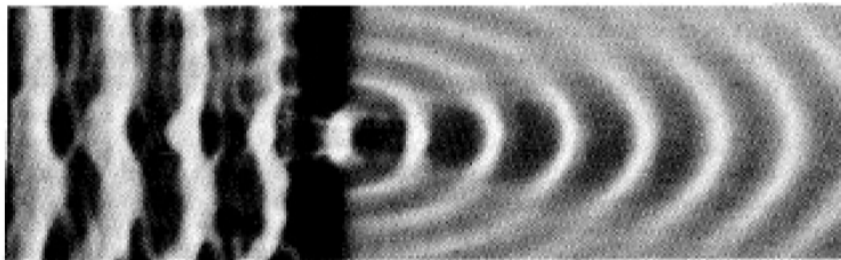
## Hullámok elhajlása akadályok közelében



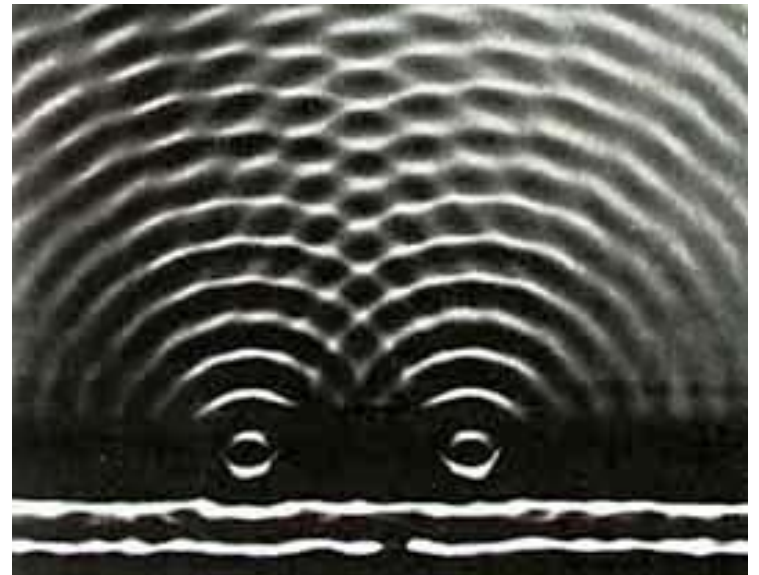
(a)



(b)



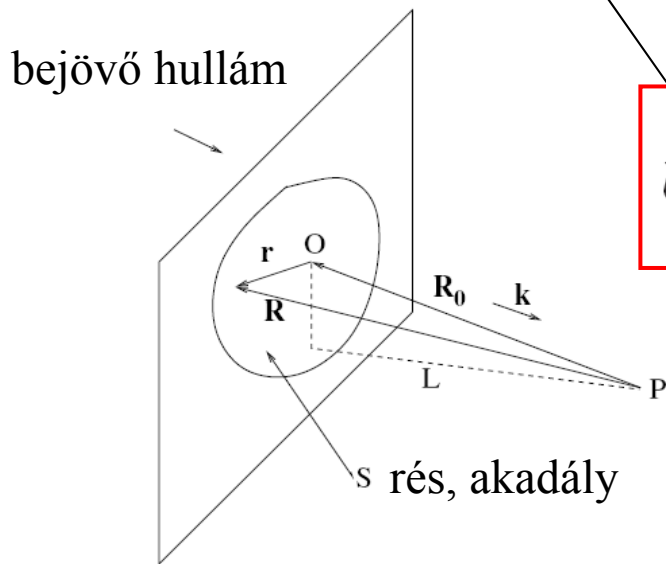
(c)



# Kirchhoff-elmélet

A **Helmholtz-egyenlet** közelítő megoldása (a Maxwell-egyenletekből levezethető), amely a rés nyitott felületén **illeszkedik** a bejövő hullámhoz, mint peremfeltételhez. Az akadály felületén **zérus** járulékkal számol, mert a fő effektus a hullámfront kivágása. Kirchhoff-elmélet a Green-tételt használja.

P-ben a hullám amplitúdója, **Fresnel-integrál**:



$$U(P) = C \int_S d^2\mathbf{r} U(\mathbf{r}) \frac{e^{ikR}}{R} \cos \vartheta,$$

integrálás a résre

$$C = k/(2\pi i) = -i/\lambda$$

$$U(\mathbf{r}) = U_{\text{be}} T(\mathbf{r})$$

bejövő hullám a résnél

Komplex áteresztőképesség:  $T(\mathbf{r}) = |T(\mathbf{r})| e^{i\Phi(\mathbf{r})}$

$\cos \vartheta$  ferdeségi tényező (obliquity, inclination factor), gyakran  $\sim 1$

$\vartheta$  az  $\mathbf{R}$  vektor és a rés  $\mathbf{r}$  pontjában a rés normálisa közötti szög

## Sorfejtés

A fizika a fázisban van!

$$R = |\mathbf{R}| = \sqrt{(\mathbf{R}_0 + \mathbf{r})^2} = R_0 \sqrt{1 + 2\frac{\mathbf{R}_0 \mathbf{r}}{R_0^2} + \frac{\mathbf{r}^2}{R_0^2}} \approx R_0 \left( 1 + \frac{\mathbf{R}_0 \mathbf{r}}{R_0^2} + \frac{\mathbf{r}^2}{2R_0^2} - \frac{1}{2} \frac{(\mathbf{R}_0 \mathbf{r})^2}{R_0^4} \right)$$

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2, \text{ ha } x \ll 1$$

$$\mathbf{k}/|\mathbf{k}| = -\mathbf{R}/|\mathbf{R}| \approx -\mathbf{R}_0/|\mathbf{R}_0|$$

$$U(P) = \frac{k}{2\pi i} \frac{e^{ikR_0}}{R_0} \int_S d^2\mathbf{r} U(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r} + i\frac{k}{2R_0}r^2 + \frac{1}{4}\frac{(\mathbf{k}\mathbf{r})^2}{kR_0}}$$

**Fresnel-diffrakció:**  $r^2$  lényeges, a **résre szemből nézzünk**,  
ha  $\mathbf{k} \perp \mathbf{r}$ , azaz  $\mathbf{k}\mathbf{r} = 0$

$$U(P) = -\frac{i}{\lambda} \frac{e^{ikR_0}}{R_0} \int_S d^2\mathbf{r} U(\mathbf{r}) e^{i\frac{k}{2R_0} r^2}$$

**Fraunhofer-diffrakció:**

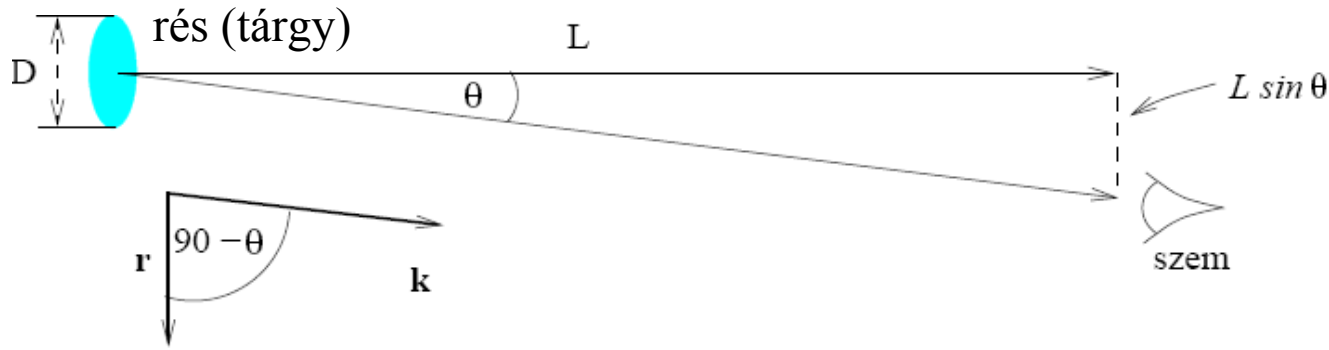
ebben az esetben  $\mathbf{k}$  irányból (*ferdén*) és  $R_0 \rightarrow \infty$  (*messziről*) nézünk a réstre

$$U(P) = -\frac{i}{\lambda} \frac{e^{ikR_0}}{R_0} \int_S d^2\mathbf{r} U(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}$$



**Fourier-transzformáció**  
**Fourier-optika**

## Hol a határ a Fresnel- és Fraunhofer-diffrakció között?



Fresnel-kitevő („Fresnel-szám”):  $\frac{kr^2}{2R_0} \sim \frac{D^2}{\lambda L}$

Fraunhofer-kitevő:  $kr \sim \frac{D}{\lambda} \sin \theta$

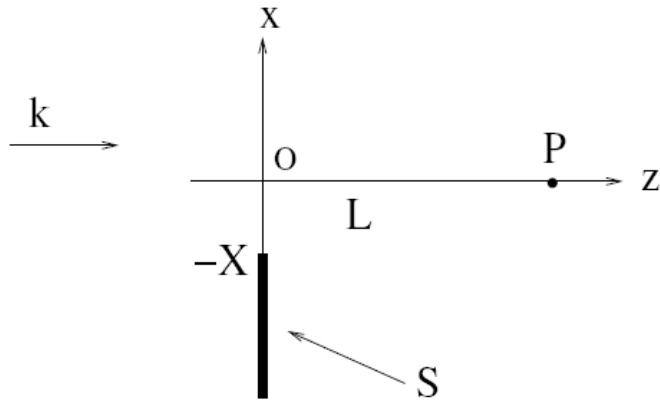
A Fresnel a nagyobb, ha

$$L \sin \theta < D$$

A **részhez közel** vagy **szemből** (tetszőleges  $L$  távolság esetén) nézve Fresnel-diffrakcióval, míg a **réstől távol és ferdén** nézve Fraunhofer-diffrakcióval kell számolni.

# Fresnel-diffrakció fontos példái

1) Egydimenziós él árnyéka:



$$U(P) = -\frac{i}{\lambda} \frac{e^{ikR_0}}{R_0} \int_S d^2\mathbf{r} U(\mathbf{r}) e^{i\frac{k}{2R_0} r^2}$$

$$R_0 = L, \quad r = x, \quad \frac{k}{2R_0} = \frac{\pi}{2} \frac{2}{\lambda L}$$

$$U(P) = -\frac{i}{\lambda} U_0 \frac{e^{ikL}}{L} \int_{-X}^{\infty} dx e^{i\frac{\pi}{2} \frac{2x^2}{\lambda L}} = -\frac{i}{\lambda} U_0 \sqrt{\frac{\lambda L}{2}} \int_{-\sqrt{\frac{2}{\lambda L}} X}^{\infty} d\eta e^{i\frac{\pi}{2} \eta^2}$$

$$\eta = \sqrt{\frac{2}{\lambda L}} x$$

$$F(z) = \int_0^z d\eta e^{i\frac{\pi}{2} \eta^2} = C(z) + iS(z), \quad \text{ahol}$$

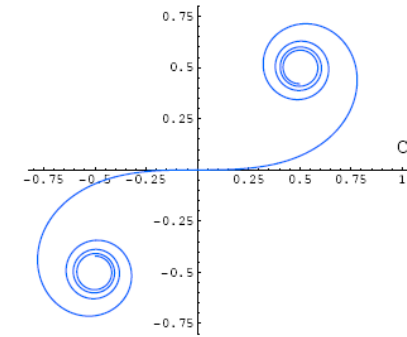
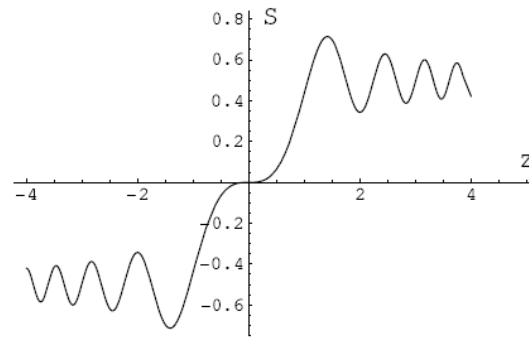
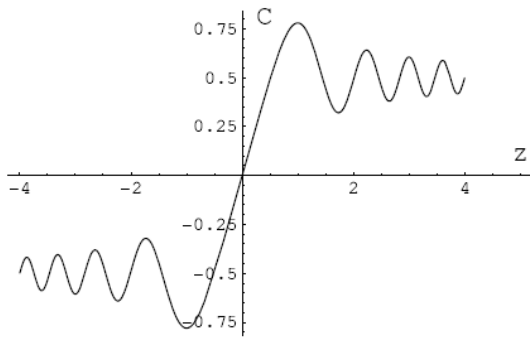
$$C(z) = \int_0^z d\eta \cos\left(\frac{\pi}{2} \eta^2\right),$$

$$S(z) = \int_0^z d\eta \sin\left(\frac{\pi}{2} \eta^2\right).$$

Fresnel-integrálok

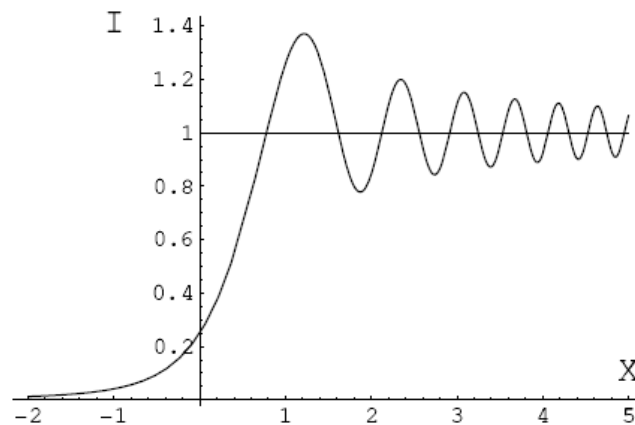


# Cornu-spirál



$$U(P) = U_0 \left[ F(\infty) - F\left(-\sqrt{\frac{2}{\lambda L}} X\right) \right]$$

$$I = |U(P)|^2$$



$X$ -et  $\sqrt{\lambda L/2}$  egységben mértük

2) Kerek rés a tengelyről nézve:  $a$  sugarú kör alakú rés  $\mathbf{kr} = 0$ .

$$\begin{aligned} U(P) &= -\frac{i}{\lambda} U_0 \frac{e^{ikL}}{L} \int_0^a 2\pi r dr e^{i\frac{\pi}{\lambda L} r^2} = -iU_0 e^{ikL} \int_0^{\frac{\pi a^2}{\lambda L}} d\xi e^{i\xi} \\ &= U_0 e^{ikL} (1 - e^{i\frac{\pi}{\lambda L} a^2}), \end{aligned}$$

Az intenzitás a  $P$  pontban:

$$I = |U(P)|^2 = 2U_0^2 \left[ 1 - \cos\left(\frac{\pi}{\lambda L} a^2\right) \right]$$

Az intenzitás oszcillál  $L$  függvényében.

### 3) Kerek akadály a tengelyről nézve:

ebben az esetben az integrálási határok változnak

$$U(P) = -\frac{i}{\lambda} U_0 \frac{e^{ikL}}{L} \int_a^\infty 2\pi r dr e^{i\frac{\pi}{\lambda L} r^2}$$

új változó:  $\xi = \frac{\pi r^2}{\lambda L}$       Regularizáció:  $U_0 \rightarrow U_0 e^{-\varepsilon \frac{\pi}{\lambda L} r^2}$

$$U(P) = -iU_0 e^{ikL} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\frac{\pi}{\lambda L} a^2}^\infty d\xi e^{i\xi - \varepsilon \xi} = -iU_0 e^{ikL} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{e^{(i-\varepsilon)\xi}}{i-\varepsilon} \right]_{\xi=\frac{\pi}{\lambda L} a^2}^{\xi=\infty}$$

$$U(P) = U_0 e^{ikL} e^{i\frac{\pi}{\lambda L} a^2}$$

$$I = |U(P)|^2 = U_0^2$$

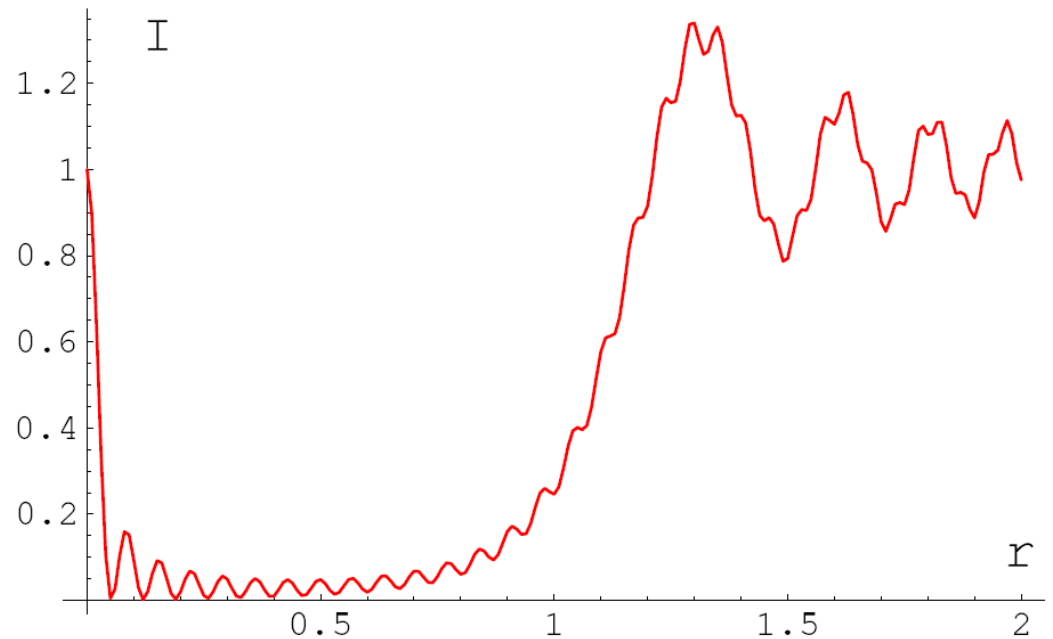
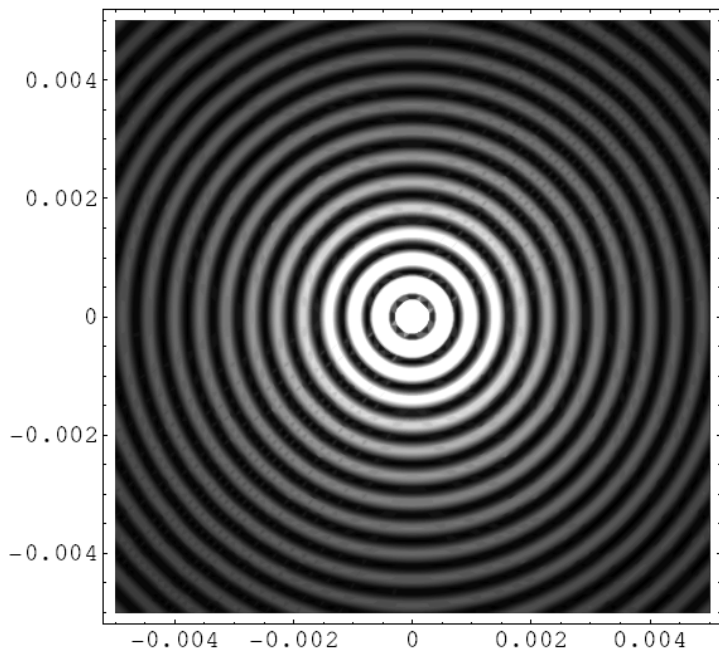
A körlap mögött tapasztalható világos foltot **Poisson-foltnak** (vagy Arago-foltnak) nevezik.

A geometria optika szerint az árnyék mögött az árnyéktér miatt az intenzitás **zérus**.  
A Poisson-folt a hullámoptika egy **fényes** bizonyítéka.

## Poisson-folt numerikus számolása

**Babinet-elv:** a rés és a komplementer lemez amplitúdójának összege a sima síkhullám.

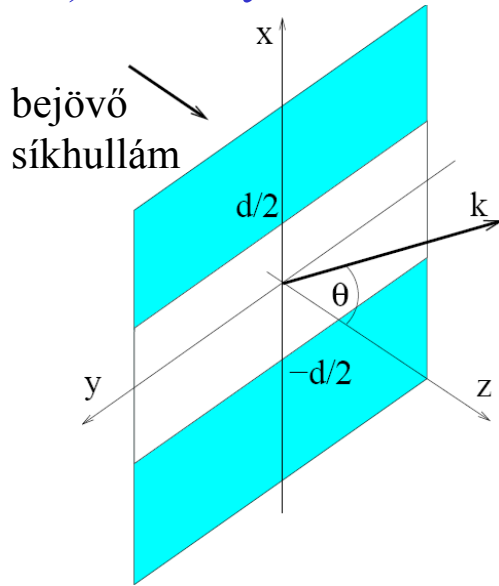
$$U_1 + U_2 = U_0$$



A korong sugara  $a = 20\mu\text{m}$ ,  $L = 5a$  és  $\lambda = 550\text{ nm}$

# Fraunhofer-diffrakció fontos példái

## 1) Vékony rés:



$$U(P) = -\frac{i}{\lambda} \frac{e^{ikR_0}}{R_0} \int_S d^2\mathbf{r} U(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

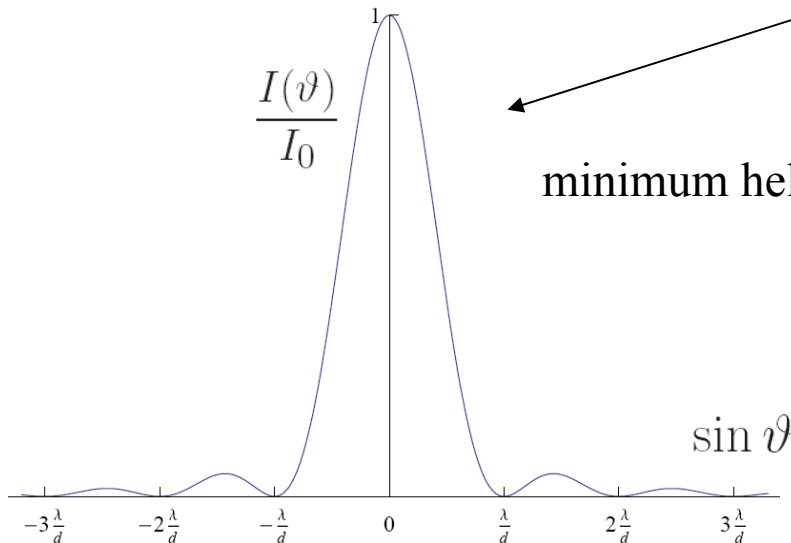
A  $\mathbf{k}$  vektor az  $(x,z)$  síkban fekszik:  $\mathbf{k} = k \begin{pmatrix} \sin \vartheta \\ 0 \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{k}\mathbf{r} = kx \sin \vartheta$

$$U(\vartheta) = C U_{\text{be}} \int_S d^2\mathbf{r} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \sim \int_{-d/2}^{d/2} dx e^{ikx \sin \vartheta} = \dots = U_0 \frac{\sin(k \frac{d}{2} \sin \vartheta)}{k \frac{d}{2} \sin \vartheta}$$

$$I(\vartheta) = I_0 \frac{\sin^2(k \frac{d}{2} \sin \vartheta)}{(k \frac{d}{2} \sin \vartheta)^2}$$

minimum helye:  $k \frac{d}{2} \sin \vartheta = m\pi$ , ahol  $m = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$

$$d \sin \vartheta = m\lambda$$



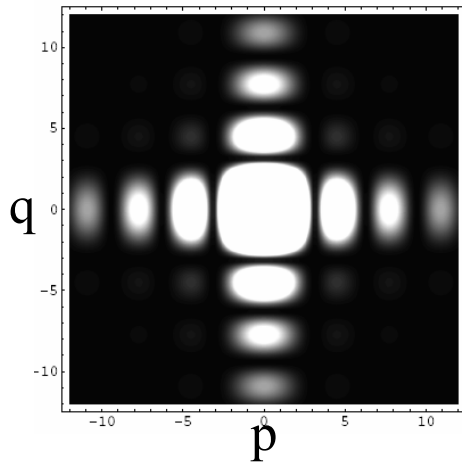
Diffrakciós kép vékony drótszálról.

Hol vannak a maximumhelyek (gyakorlat)?

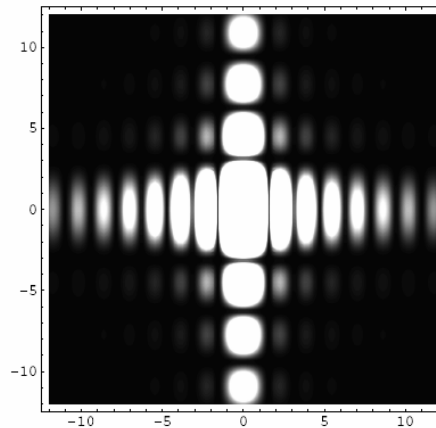
## 2) Téglalap alakú rés ( $a$ és $b$ oldalú):

$$U(P) = -\frac{i}{\lambda} \frac{e^{ikR_0}}{R_0} \int_S d^2\mathbf{r} U(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \quad \mathbf{k} = (p, q)$$

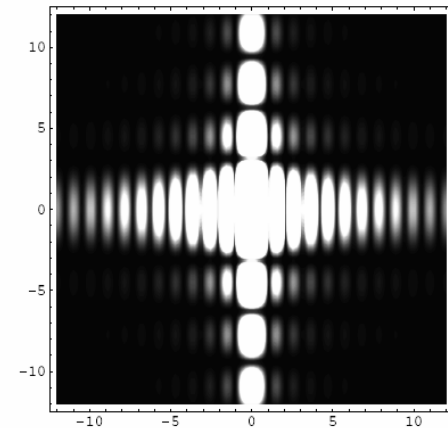
$$U(p, q) \sim \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx e^{ipx} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy e^{iqy} = ab \frac{\sin \frac{pa}{2}}{\frac{pa}{2}} \frac{\sin \frac{qb}{2}}{\frac{qb}{2}}$$



$$a = b$$

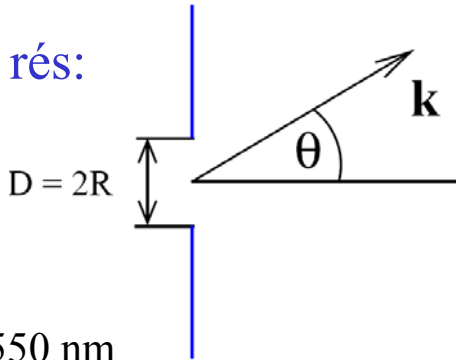


$$a = 2b$$



$$a = 3b$$

### 3) Kör alakú rés:



Sir George Biddel Airy (1801-1892)



paraméterek:

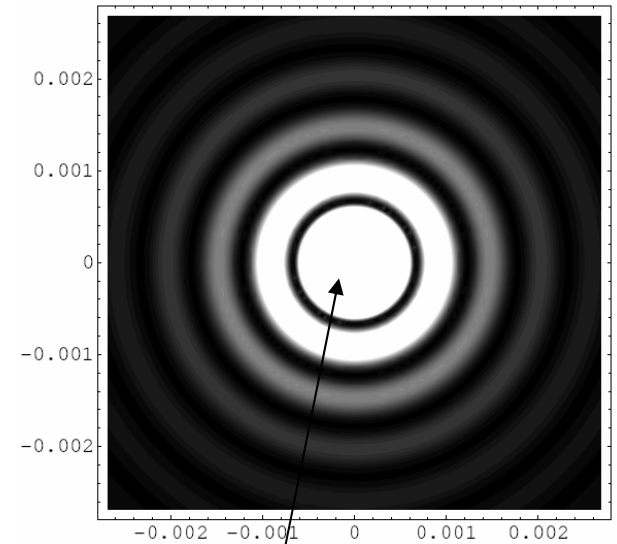
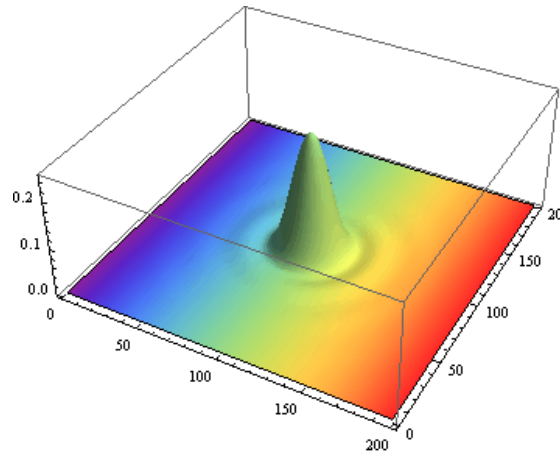
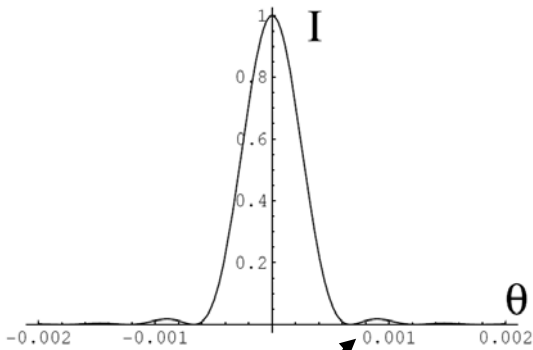
hullámhossz = 550 nm

$R = 0.5$  mm, azaz

$kR = 5712$

$$I(\theta) = I_0 \left( \frac{J_1(kR \sin \theta)}{kR \sin \theta} \right)^2$$

$J_1(x)$  1. rendű Bessel-függvény



Első minimum iránya:  $\theta_1 = \arcsin \left( 1.22 \frac{\lambda}{D} \right)$

Kis szögekre:

$$\theta_1 = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

Airy-korong, elhajlási korong  
(saját számolás)

# Optikai eszközök felbontóképessége

Optikai eszközök (pl. lencsék, tükrök, távcsövek, mikroszkóp, szem) foglalatán történő elhajlás miatt is kialakul az **Airy-korong**, mely meghatározza az optikai eszközök **felbontóképességét**.

Párhuzamos fénynyalábot egy  $f$  fókusztávolságú lencsével leképezve a fókuszpont **nem egzaktul pont**, hanem az Airy-korong, melynek sugara:

$$\varrho = \theta_1 f = 1.22 \frac{\lambda f}{D}$$

Az Airy-korong sugarát úgy csökkenthetjük, hogy vagy a hullámhosszat csökkentjük, vagy az optika eszköz méretét ( $D$ ) növeljük.

Két távoli pontot (pl. két csillagot) akkor különböztethetünk meg, ha a két pont leképezésekor kialakuló két Airy-korong **nem lapolódik át**.

A **felbontóképesség határának** tekinthető (megállapodás szerint) az az eset, amikor a két korong középpontja közti távolság éppen a korongok sugara (a két korong „félíg” átlapolt).

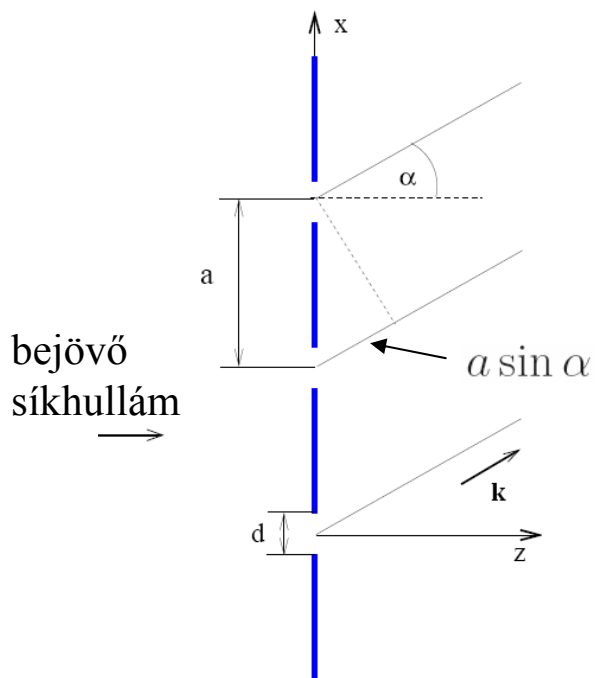
Ekkor két  $\varphi$  szögtávolságban lévő tárgy akkor különböztethető meg, ha

$$\varphi \geq \theta_1 = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$



#### 4) Optikai rács ( $N$ db rés):

Periodikus átérésztés:  $T(x) = T(x + a)$



$$\mathbf{k} = k \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ 0 \\ \cos \alpha \end{pmatrix} \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{kr} = kx \sin \alpha$$

$$U(\alpha) = C U_{\text{be}} \int_{-d/2}^{(N-1)a+d/2} dx T(x) e^{ikx \sin \alpha}$$

új változó:

$$2\pi u = k a \sin \alpha$$

$$\sim \sum_{n=0}^{N-1} \int_{-d/2}^{d/2} d\eta e^{ik(na+\eta) \sin \alpha}$$

$$= \left( \sum_{n=0}^{N-1} e^{ikna \sin \alpha} \right) \left( \int_{-d/2}^{d/2} d\eta e^{ik\eta \sin \alpha} \right)$$

$$= \left( \sum_{n=0}^{N-1} e^{i2\pi un} \right) \left( \int_{-d/2}^{d/2} d\eta e^{ik\eta \sin \alpha} \right)$$

$U_1$  rész

$$= \dots = U_0 \left( \frac{\sin(\pi u N)}{\sin(\pi u)} \right) \left( \frac{\sin\left(k \frac{d}{2} \sin \alpha\right)}{k \frac{d}{2} \sin \alpha} \right)$$

$$U(\alpha) = U_0 S_N(\alpha, a) F(\alpha, d)$$

Szerkezeti tényező (structure factor)

Alaktényező (form factor)

$$x = na + \eta$$

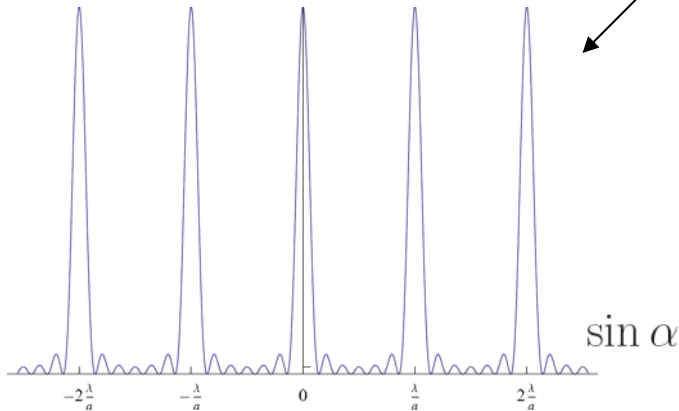
$$n \in \{0; 1; \dots; N - 1\}$$

$$\eta = [-d/2, d/2]$$

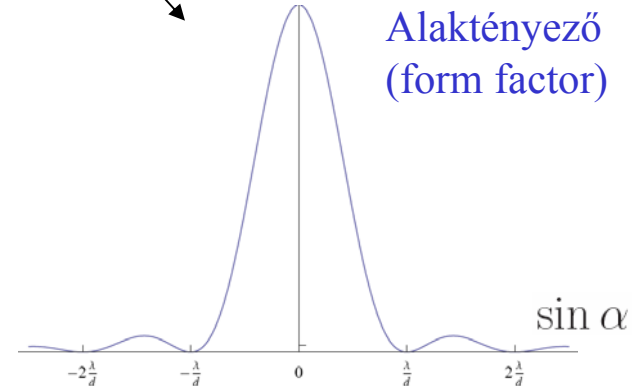
**Intenzitás:**  $I(\alpha) = |U(\alpha)|^2 = I_0 \frac{\sin^2(\pi u N)}{\sin^2(\pi u)} |U_{1 \text{ r\u00e9s}}(\alpha)|^2$  ahol  $2\pi u = k a \sin \alpha$

Szerkezeti tényez\u0151 (structure factor):

$N = 7$   
 $a/d = 3$



Alakt\u00e9nyez\u0151  
(form factor)



Intenzit\u00e1s cs\u00f3csok, rendek  
(f\u0151maximumok) helye:  
ha  $u$  egész sz\u00e1m

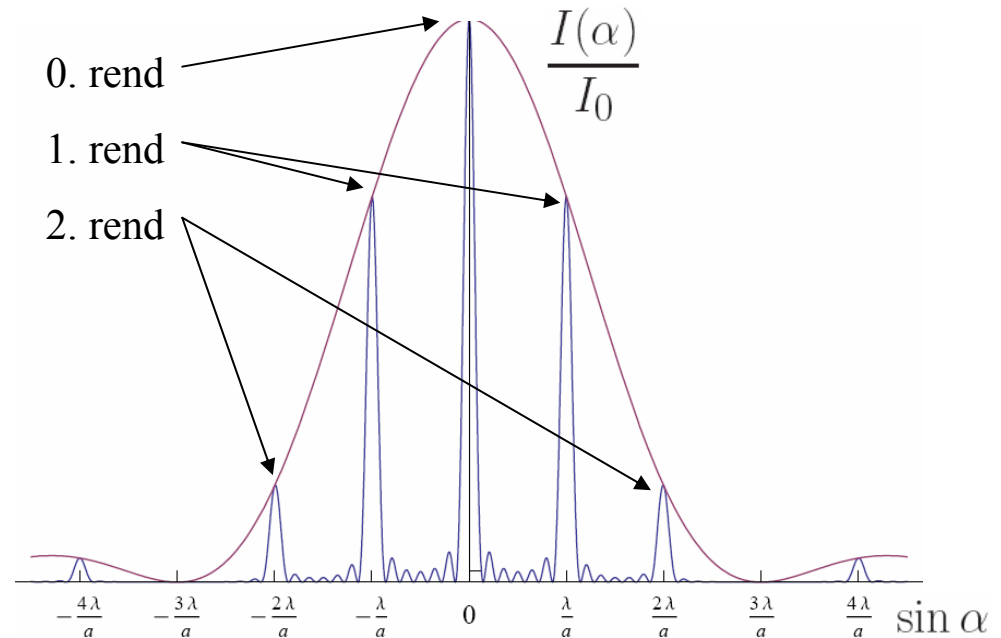


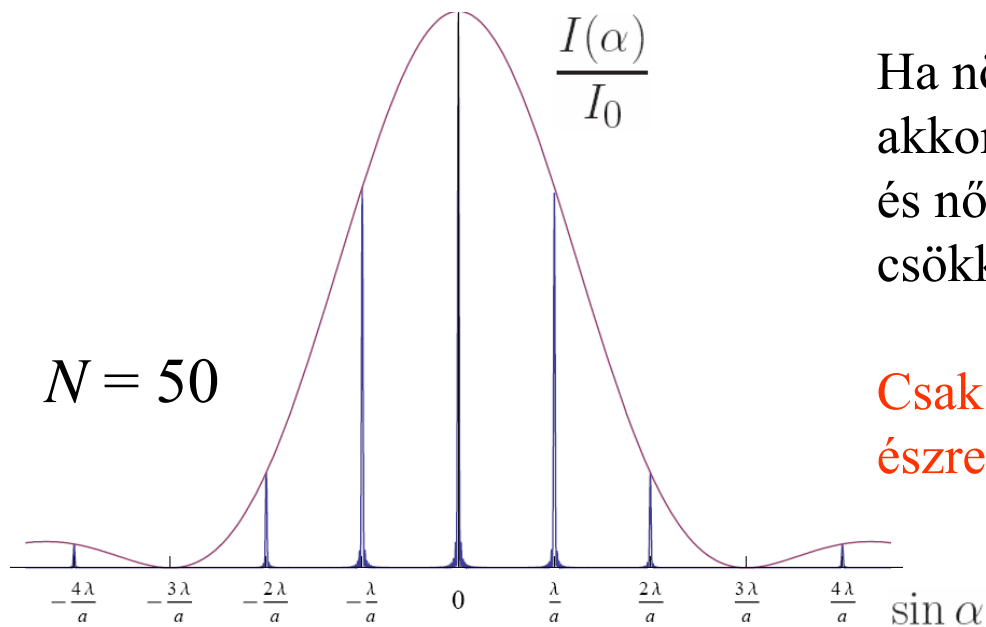
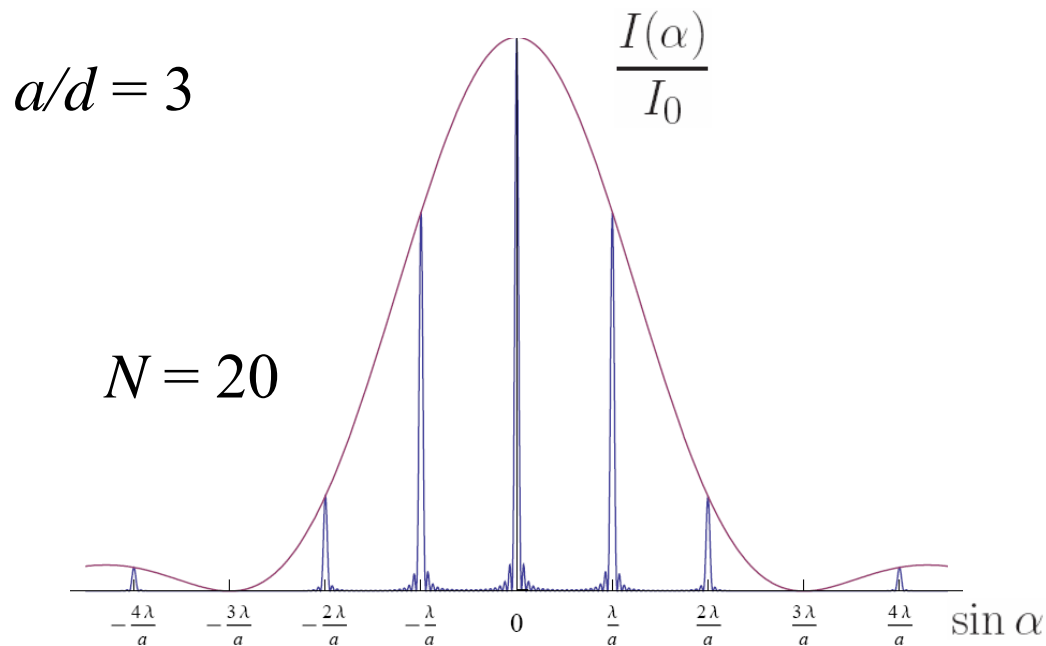
er\u0151s\u00edt\u00e9sek \u00edr\u00e1nya:

$$a \sin \alpha = m \lambda$$

ahol  $m$  egész sz\u00e1m

\u00fatk\u00fcl\u0151nbs\u00e9g:  $a \sin \alpha$

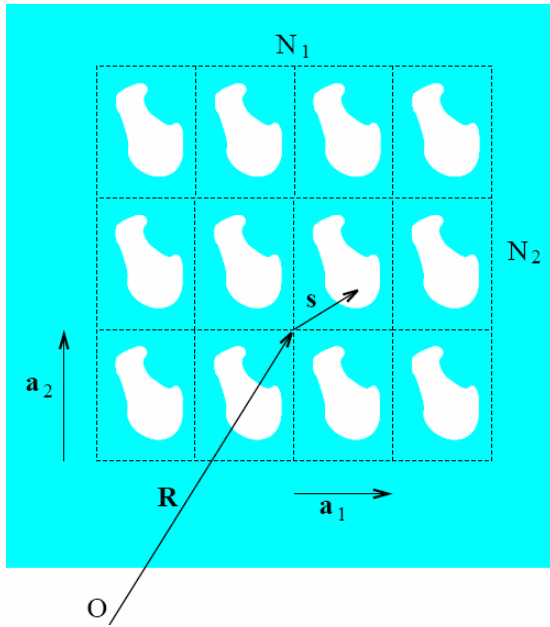




Ha növeljük a rések számát,  $N$ -t, akkor a főmaximumok vékonyodnak és nőnek, míg a mellékmaximumok csökkennek.

Csak a főmaximumok helyén lesz észrevehető intenzitás.

## 5) Általánosítás két- (három) dimenziós rácsra és tetszőleges, de azonos apertúrára



$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{s}$$

$$\mathbf{R} = n_1 \mathbf{a}_1 + n_2 \mathbf{a}_2 \quad \text{rácsvektor} \quad n_1 \text{ és } n_2 \text{ egész számok}$$

$$T(\mathbf{R} + \mathbf{s}) = T(\mathbf{s})$$

$$U(\mathbf{k}) \sim \int_{\text{ernyő}} d^2 \mathbf{r} T(\mathbf{r}) e^{i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = \int_{\text{ernyő}} d^2 \mathbf{r} T(\mathbf{R} + \mathbf{s}) e^{i \mathbf{k} \cdot (\mathbf{R} + \mathbf{s})}$$

$$= \sum_{\mathbf{R}} \int_{\text{ernyő}} d^2 \mathbf{s} T(\mathbf{s}) e^{i \mathbf{k} \cdot (\mathbf{R} + \mathbf{s})} = \left( \sum_{\mathbf{R}} e^{i \mathbf{k} \cdot \mathbf{R}} \right) \left( \int_{1 \text{ rés}} d^2 \mathbf{s} T(\mathbf{s}) e^{i \mathbf{k} \cdot \mathbf{s}} \right)$$



$$U(\mathbf{k}) = U_0 S_N(\mathbf{k}) F(\mathbf{k})$$

$\mathbf{a}_1$  és  $\mathbf{a}_2$  elemi cella vektorok

$N = N_1 N_2$  elemi cellák száma

$$S_N(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{R}} e^{i \mathbf{k} \cdot \mathbf{R}}$$

Szerkezeti tényező (structure factor)

$$F(\mathbf{k}) = \int_{1 \text{ rés}} d^2 \mathbf{s} T(\mathbf{s}) e^{i \mathbf{k} \cdot \mathbf{s}}$$

Alaktényező (form factor)

$$S_N(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{R}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}}$$

szerkezeti tényező kiszámítása:

legyen  $\mathbf{k} = u_1 \mathbf{b}_1 + u_2 \mathbf{b}_2$  ahol  $\mathbf{a}_i \mathbf{b}_j = 2\pi \delta_{ij}$ , ahol  $i, j = 1, 2$

$$\mathbf{a}_1 \mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_2 \mathbf{b}_2 = 2\pi$$

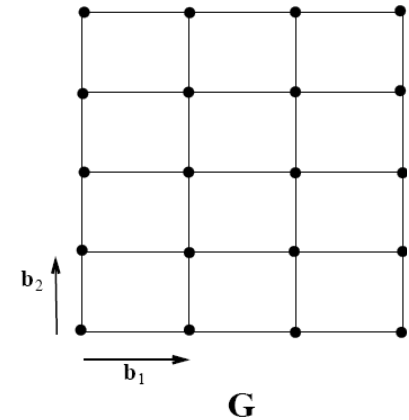
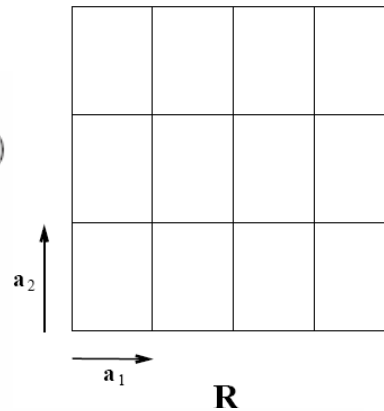
$$\mathbf{a}_1 \mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_2 \mathbf{b}_1 = 0, \text{ merőlegesek}$$

$\mathbf{b}_1$  és  $\mathbf{b}_2$  reciprokrács elemi cellájának vektorai

$$\mathbf{k}\mathbf{R} = (u_1 \mathbf{b}_1 + u_2 \mathbf{b}_2) (n_1 \mathbf{a}_1 + n_2 \mathbf{a}_2) = 2\pi (u_1 n_1 + u_2 n_2)$$

$$S_N(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{R}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}} = \sum_{n_1=0, n_2=0}^{N_1-1, N_2-1} e^{i2\pi(u_1 n_1 + u_2 n_2)}$$

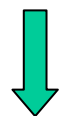
$$= \sum_{n_1=0}^{N_1-1} e^{i2\pi u_1 n_1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} e^{i2\pi u_2 n_2}$$



$$= e^{i\pi(N_1-1)u_1} e^{i\pi(N_2-1)u_2} \left( \frac{\sin(\pi u_1 N_1)}{\sin(\pi u_1)} \right) \left( \frac{\sin(\pi u_2 N_2)}{\sin(\pi u_2)} \right)$$

Intenzitás csúcsok, rendek (főmaximumok) helye:

$$u_1 = m_1 \text{ és } u_2 = m_2 \text{ egész számok}$$

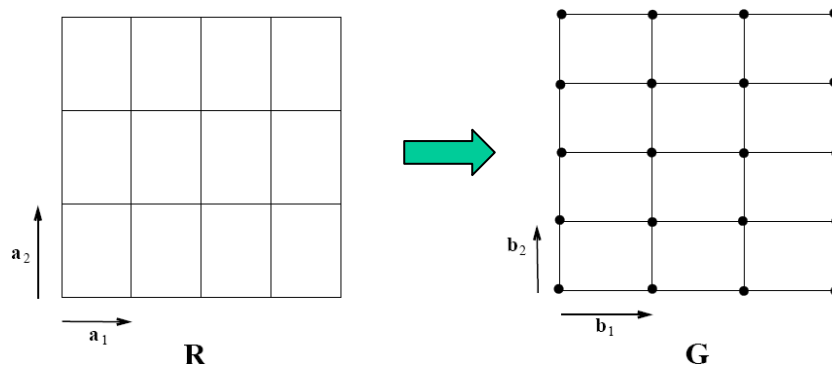


$$\mathbf{k} \equiv \mathbf{G} = m_1 \mathbf{b}_1 + m_2 \mathbf{b}_2$$

**G**: reciprokrács

A főmaximumok a reciprokrács pontjaiban vannak:

$$|S_N(\mathbf{k} = \mathbf{G})| = N_1 N_2 = N$$



5 a) Speciális eset: téglalap rács, oldalainak hossza:  $a_1$  és  $a_2$

$$\mathbf{a}_1 = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a}_2 = a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$\mathbf{b}_1 = \frac{2\pi}{a_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b}_2 = \frac{2\pi}{a_2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$\mathbf{k} = u_1 \mathbf{b}_1 + u_2 \mathbf{b}_2 = 2\pi \begin{pmatrix} \frac{u_1}{a_1} \\ \frac{u_2}{a_2} \end{pmatrix}$$

legyen  $\mathbf{k} = k \begin{pmatrix} \sin \alpha_1 \\ \sin \alpha_2 \end{pmatrix}$



$$2\pi u_1 = k a_1 \sin \alpha_1$$

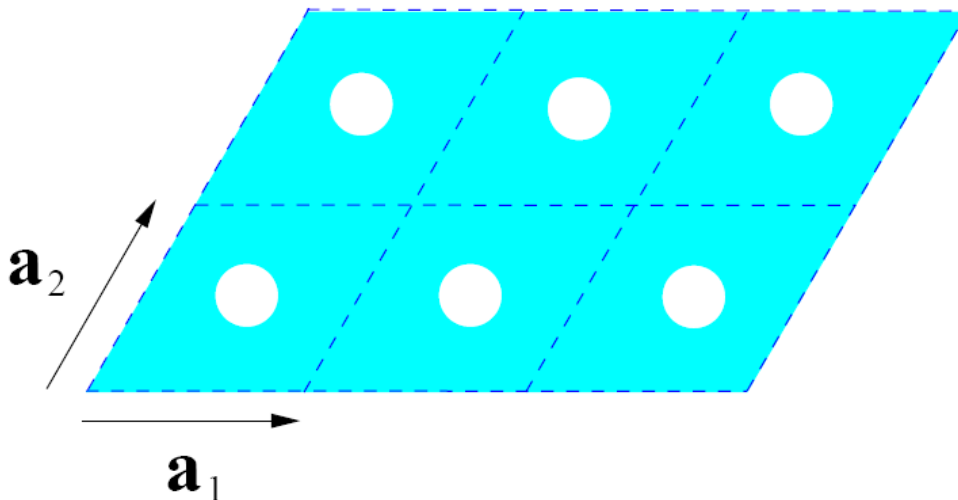
$$2\pi u_2 = k a_2 \sin \alpha_2$$



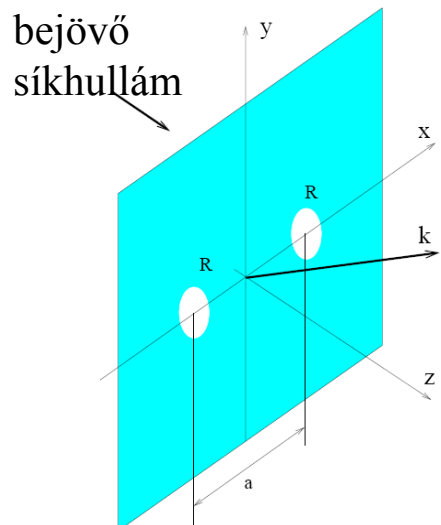
$$a_1 \sin \alpha_1 = m_1 \lambda$$

$$a_2 \sin \alpha_2 = m_2 \lambda$$

5 b) Speciális eset: háromszögrács

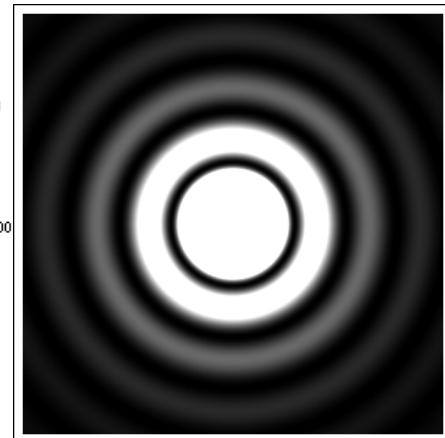
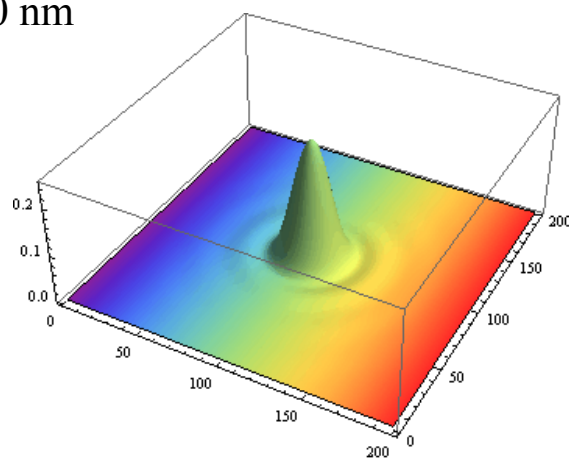


## 5 c) Speciális eset: két kör alakú lyuk diffrakciója

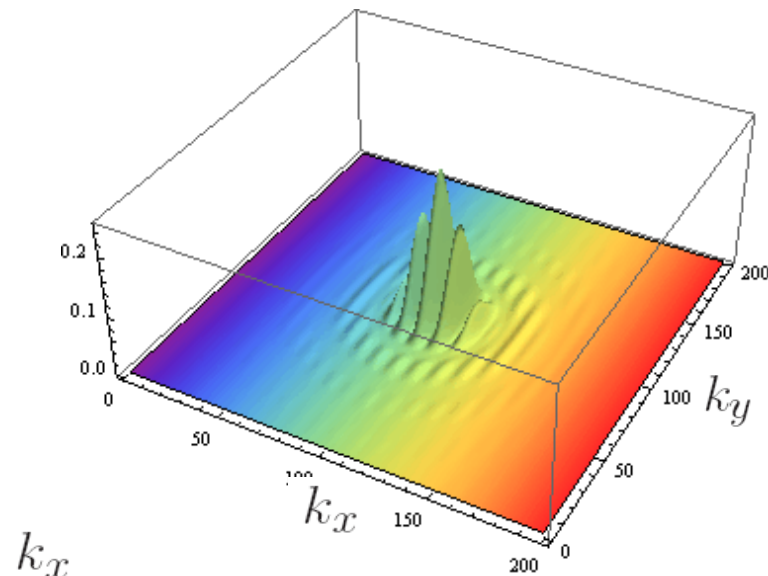
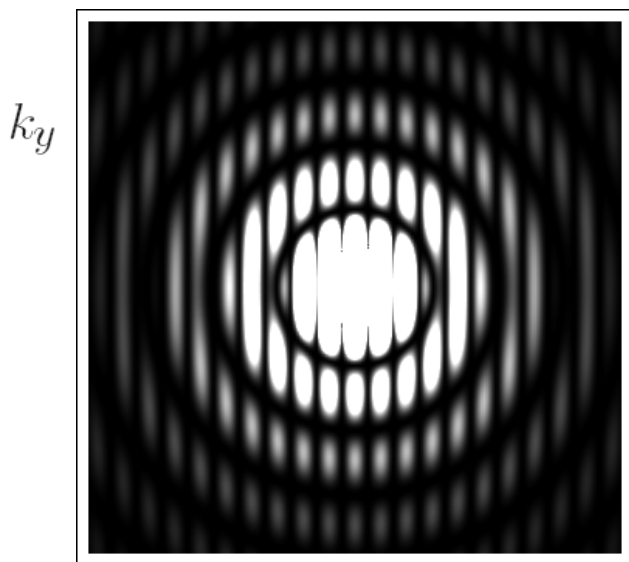


paraméterek:  
 hullámhossz = 550 nm  
 $R = 0.5$  mm, azaz  
 $kR = 5712$   
 $a = 10R = 5$  mm

egy lyuk diffrakciós képe:

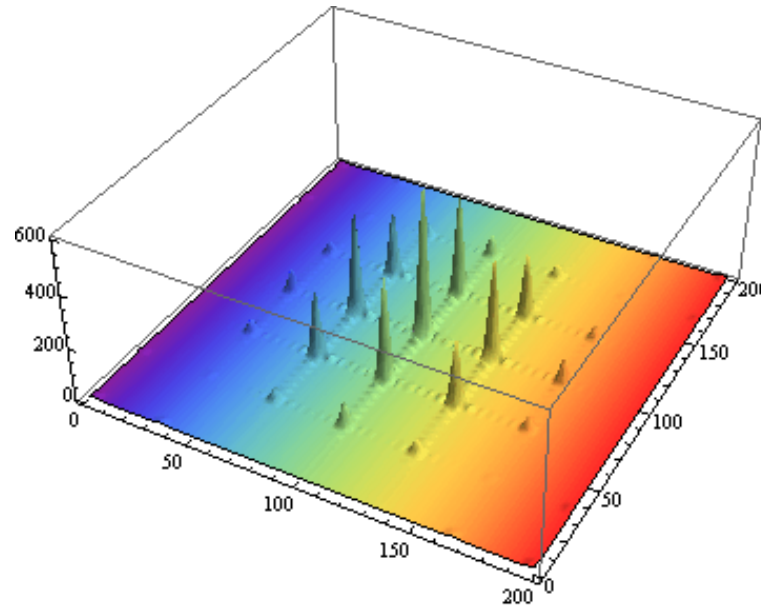
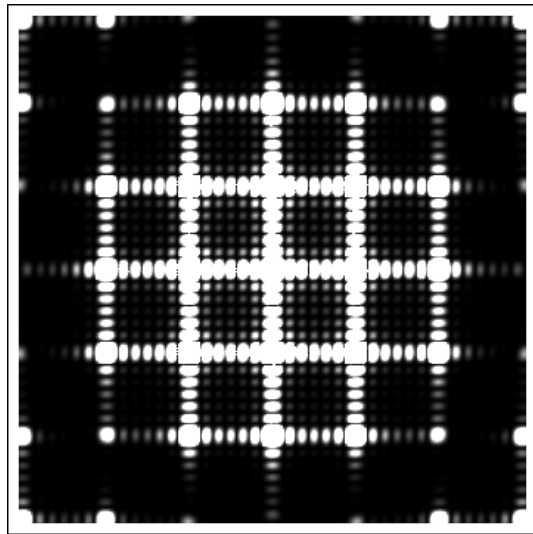


két lyuk diffrakciós képe:

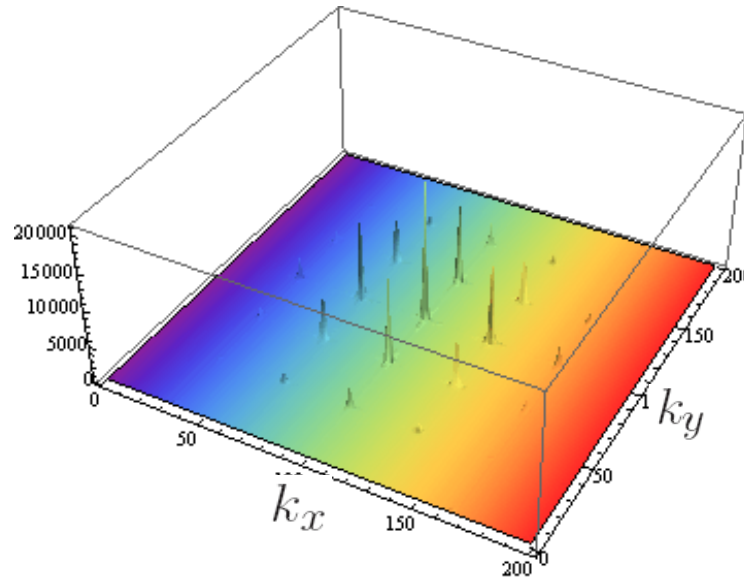
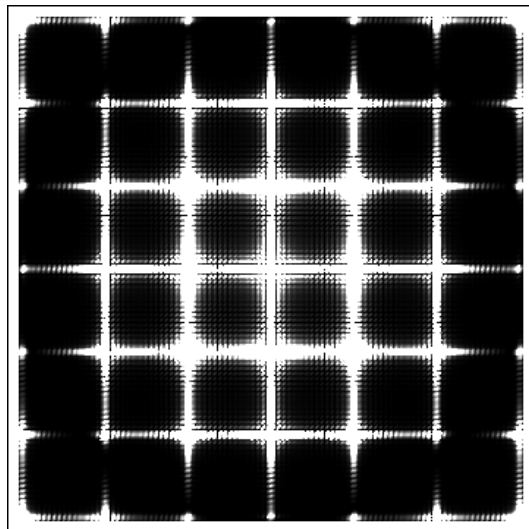




5 d) Speciális eset:  $N_1 \times N_2$  számú periodikusan elhelyezett kör alakú lyuk diffrakciója



$N_1 = N_2 = 7$



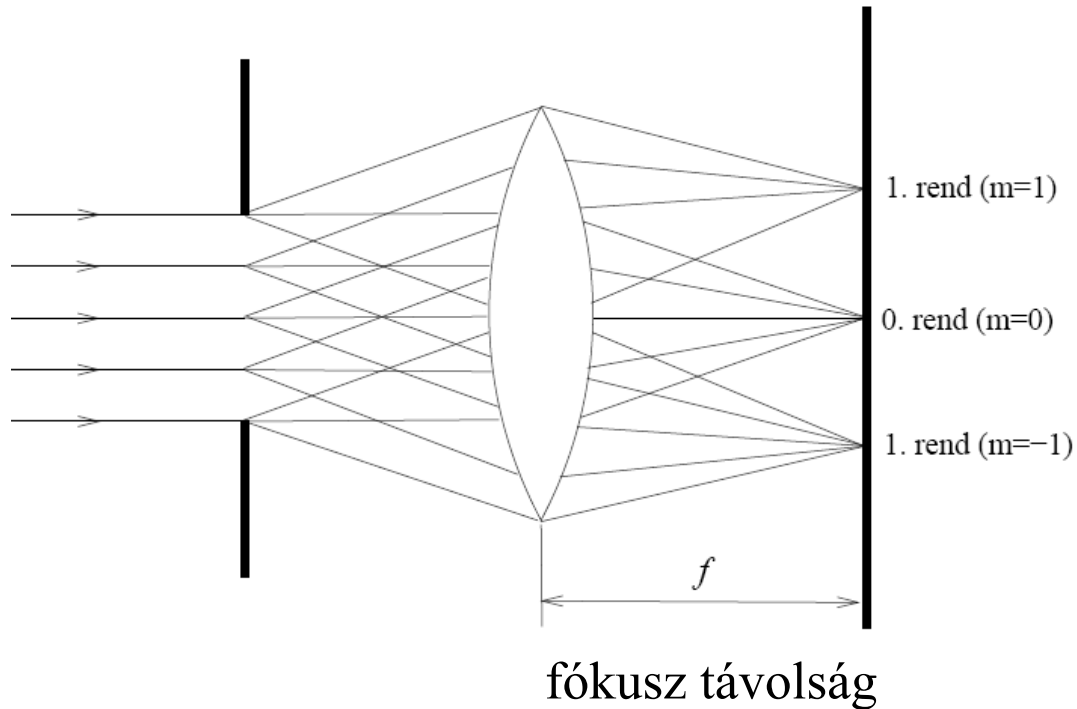
$N_1 = N_2 = 17$

paraméterek:  
hullámhossz = 550 nm  
 $R = 0.5$  mm, azaz  
 $kR = 5712$   
 $a = 10R = 5$  mm

(saját számolás)

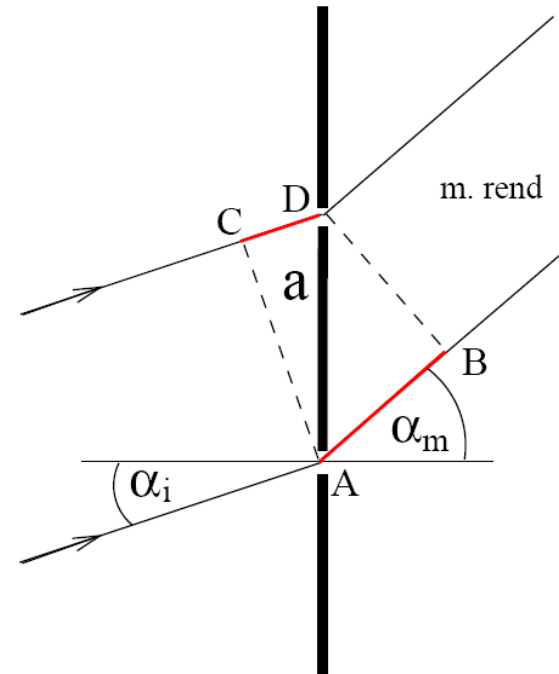
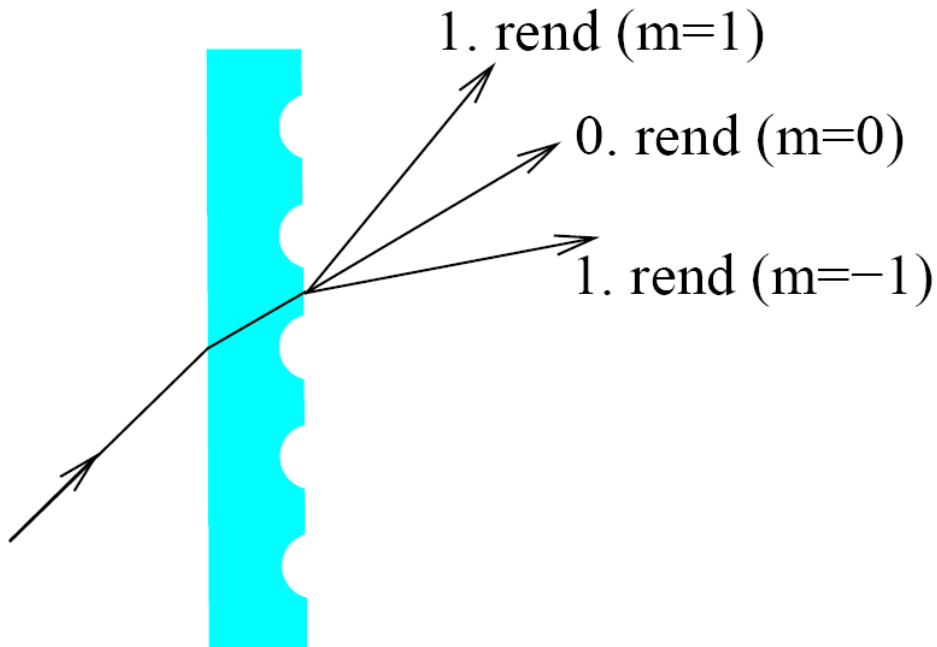
## Fraunhofer-diffrakció kísérleti megvalósítása

Végtelen távoli megfigyelési pont könnyen megvalósítható egy gyűjtőlencsével.  
Egy diffrakciós irány egy pont a lencse fókusz-síkjába helyezett ernyőn.



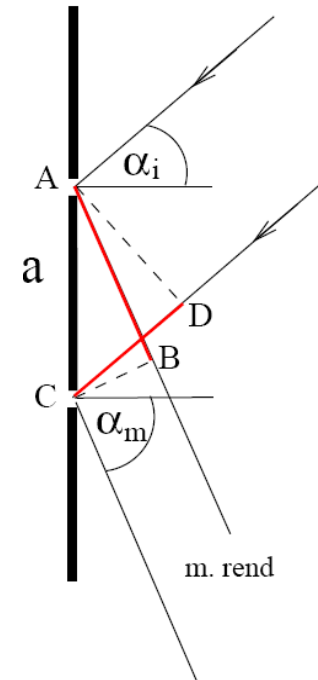
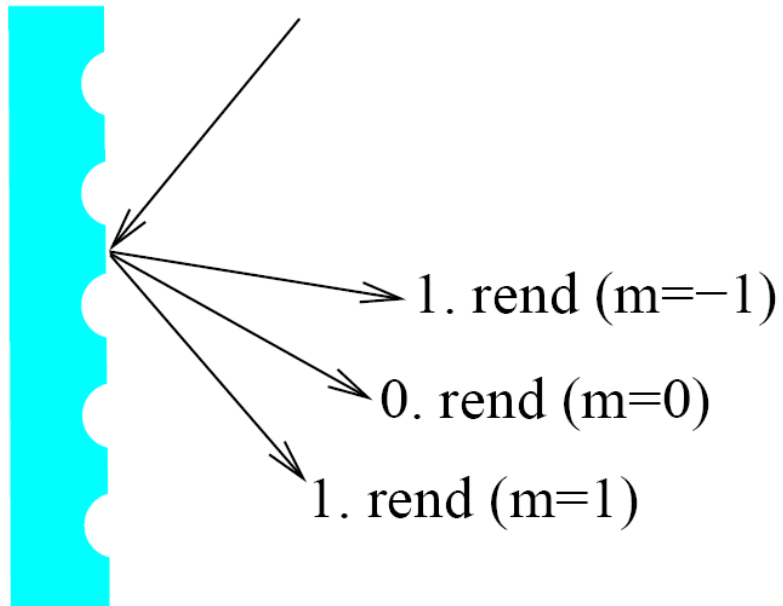
Ebből lesz a **Fourier-optika**.

## 6) Transzmissziós diffrakciós rács: pl. üvegfelület karcolása



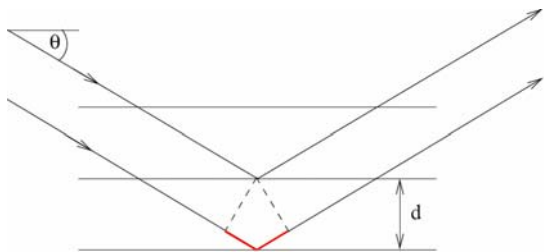
$$\overline{AB} - \overline{CD} = a (\sin \alpha_m - \sin \alpha_i) = m\lambda$$

## 7) Reflexió diffrakciós rács: pl. CD diszk



$$\overline{AB} - \overline{CD} = a (\sin \alpha_m - \sin \alpha_i) = m\lambda$$

- 8) **Bragg-reflexió:** Az optikai rácson való Fraunhofer-diffrakcióval rokon jelenség. Gyengén tükröző síkok periodikus elrendezésén való erős reflexió.

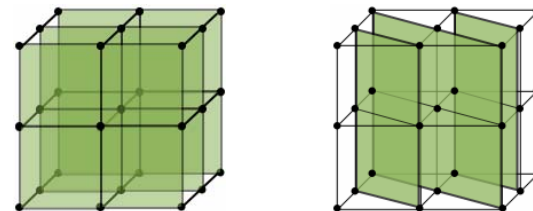


**Bragg-feltétel:** konstruktív interferencia (erősítés)

$$2d \sin \theta = n\lambda, \quad n = 1, 2 \dots$$

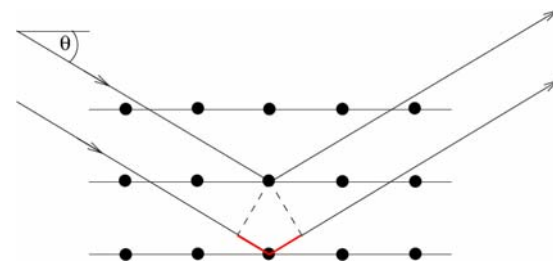
### Alkalmazások:

- a) Kristályszerkezet meghatározása  
Röntgen-diffrakcióval (Max von Laue, 1913)



- b) Sokrétegű, nagyhatásfokú  
dielektrikum-rétegek (lásd később)

- c) Akusztóoptikai fényeltérítés (lásd később)



## 9) Random közeg: véletlenszerűen elhelyezett apertúrák

Ilyen például felhők vízcseppjein, vagy aerosol szemcséken történő diffrakció.

$$\begin{aligned} |S_N(\mathbf{k})|^2 &= \left| \sum_j e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_j} \right|^2 = \sum_j e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_j} \sum_l e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_l} = \sum_{j=l=1}^N e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_l)} + \sum_{j \neq l} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_l)} \\ &= N + \sum_{j \neq l} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_l)} \approx N \end{aligned}$$

Az „interferencia” tagok kiejtik egymást!



$$I(\mathbf{k}) \sim \begin{cases} |S_N(\mathbf{k} = \mathbf{G})|^2 = N^2, & \text{rácsra} \\ |S_N(\mathbf{k})|^2 \approx N, & \text{random apertúrákra} \end{cases}$$

A diffrakciós képen egy apertúra Fraunhofer-diffrakciója jelenik meg, de  $N$ -szer kisebb intenzitással, mint a szabályosan elrendezett apertúráknál.